6.3 高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

这里$n \geqslant 2$，$a_i(x)$及$f(x)$在某区间I上连续.

第三节 高阶线性微分方程

一、高阶线性微分方程解的结构

1. 二阶齐次方程解的结构:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个解, 那末 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(1)的解.（C_1, C_2 是常数）

因为 $\left(C_1y_1 + C_2y_2\right)^{(n)} = C_1(y_1)^{(n)} + C_2(y_2)^{(n)}$

问题: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 一定是通解吗?

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

问题： $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$一定是通解吗？

答案：

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如，$y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解，则

$y_2(x) = 2\,y_1(x)$ 也是齐次方程的解

但是 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2)y_1(x)$

并不是通解

定义：设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为定义在区间 I内的n个函数．如果存在n个不全为零的常数，使得当x在该区间内有恒等式成立

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0,$$

那么称这n个函数在区间I内线性相关．否则称线性无关

例如　$1, \cos^2 x, \sin^2 x$　线性相关

因为在$(-\infty, +\infty)$上　有　$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$ 必线性 <u>相关</u>

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的充要条件:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

(无妨设 $k_1 \neq 0$)

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

$$\Longleftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = u(x),$$ $u(x)$不是常值函数

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$ **(伏朗斯基行列式)**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理 2：如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程(1)的两个线性无关的特解，那么$y = C_1y_1 + C_2y_2$就是方程(1)的通解.

例如 $y'' + y = 0$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$,

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数,

故方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关解，则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k\text{为任意常数})$$

2. 二阶非齐次线性方程的解的结构:

定理 3 设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解，Y 是与(2)对应的齐次方程(1)的通解，那么 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

若 y_1, y_2 是(2)的解，那么 $y_1 - y_2$ 是 **(1)** 的解

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

定理 4　设非齐次方程(2)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，如 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程，

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^*+y_2^*$ 就是原方程的特解.

解的叠加原理

例1. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

$(\cancel{A})$ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

$(\cancel{B})$ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$. (考研 题)

提示: (C) $C_1(y_1 + y_3) + C_2(y_2 + y_3) - y_3$;

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,

二者线性无关.

例2. 已知微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个解 $y_1=x,\ y_2=e^x,\ y_3=e^{2x}$,求此方程满足初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$ 的特解 .

解: y_2-y_1 与 y_3-y_1 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{e^x-x}{e^{2x}-x}\neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y=C_1(e^x-x)+C_2(e^{2x}-x)+x$$

代入初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$, 得 $C_1=-1,\ C_2=2$,

故所求特解为 $y=2e^{2x}-e^x.$

二、常系数线性微分方程

n阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=f(x)$$

1. 常系数线性齐次方程

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数}) \quad ①$$

猜测 ①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数，可以是复数)

$r \in R$或$r \in C$ 都有$(e^{rx})^{(n)} = r^n e^{rx}$ 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad r^2 + pr + q = 0 \quad ②$$

称②为微分方程①的特征方程，其根称为特征根.

若r为复数, $r = a + bi$,

$$e^{rx} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数}) \quad ①$$

设 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 为(1) 的解

则 r 为特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ ② 的根

1. 特征方程有两个相异实根 r_1, r_2, 则微分方程

有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

r为特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根

2. 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \dfrac{-p}{2}$,

则微分方程有一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$.

设另外一个解y_2与y_1线性无关,则 $\dfrac{y_2}{y_1} = u(x)$

$u(x)$ 不是常值函数 故 $y_2 = e^{r_1 x}u(x)$ 代入方程得:

$$\cancel{e^{r_1 x}}[\,(u'' + 2r_1u' + r_1^2u) + p(u' + r_1u) + q\,u\,] = 0$$

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0$$

注意 r_1是特征方程的重根

$$u'' = 0 \Rightarrow u = ax + b$$

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数}) \quad ①$$

设 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 为(1) 的解

则r为特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根

2. 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \dfrac{-p}{2}$,

则微分方程有一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$.

设另外一个解y_2与y_1线性无关,则 $\dfrac{y_2}{y_1} = u(x)$

$u(x)$ 不是常值函数 故 $y_2 = e^{r_1 x}u(x)$ 代入方程得:

$$u = ax + b$$

取 $u = x$, 则得 $y_2 = x\,e^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

3. 特征方程有一对共轭复根

$$r_1=\alpha+i\beta,\quad r_2=\alpha-i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

由定理1，有原方程的两个线性无关的特解:

$$\widetilde{y_1}=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\widetilde{y_2}=\tfrac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

求解步骤: $y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q$为常数)

利用 $y^{(n)} \to r^n$ 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

注意: $y = y^{(0)} \to r^0 = 1$

求出特征根: r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

特征方法程 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法.

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解:特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 特征根: $r_1 = -1$, $r_2 = 3$,

因此原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例2 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$,

解得 $r_1 = r_2 = -2$,

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

例3　求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得　$r_{1,2}=-1\pm 2i$,

故所求通解为　$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

例 4 求以 $y=xe^x$ 为特解的二阶常系数齐次线性方程.

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是:

$$y''+py'+qy=0 \quad (p,q\text{为常数})$$

其中一个特解是 $y=xe^x$，则另一个特解为 $y=e^x$

$r=1$ 是特征方程的重根，所以特征方程是

$r^2-2r+1=0$　微分方程为 $y''-2y'+y=0$

推广到任意阶常系数线性微分方程:

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0\ \ (a_k\text{ 均为常数})$$

特征方程: $r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$

若特征方程有n个互不相等的实根, $r_1, r_2, \cdots, r_n$

则微分方程的n个线性无关解为:

$$y_1=e^{r_1 x},\quad y_2=e^{r_2 x},\quad \cdots, y_n=e^{r_n x}$$

方程通解为 $y=C_1e^{r_1 x}+C_2e^{r_2 x}+\cdots+C_ne^{r_n x}$.

若特征方程含 $n-k$ 个单实根 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-k}$

一个 k 重实根 r,

则微分方程的 n 个线性无关解为:

$$e^{r_1 x},\ e^{r_2 x},\ \cdots, e^{r_{n-k} x},$$

$$e^{rx}, xe^{rx},\ x^2 e^{rx},\ \cdots, x^{k-1} e^{rx}$$

方程通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_{n-k} e^{r_{n-k} x}$$

$$+ C_{n-k+1} e^{rx} + C_{n-k+2} x e^{rx} + \cdots + C_n x^{k-1} e^{rx}.$$

若特征方程有p个单实根 $r_1, r_2, \cdots, r_p$，一个 q重实根 r，一个k 重共轭复根 $r=\alpha \pm i\beta$，($p+q+2k=n$)，则

单实根 $r_1, r_2, \cdots, r_p$，对应的线性无关解

$$e^{r_1 x},\ e^{r_2 x},\ \cdots, e^{r_p x},$$

q重实根 r对应的线性无关解

$$e^{rx}, xe^{rx},\ x^2e^{rx},\ \cdots, x^{q-1}e^{rx}$$

k 重共轭复根 $r=\alpha \pm i\beta$，对应的线性无关解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ x\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ \ \cdots,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ \cdots,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

n次代数方程有n个根, 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

例5　求 $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + y' + y = 0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2 = 0,$$

特征根为　$r_1 = -1,\quad r_{2,3} = \pm i,\quad r_{4,5} = \pm i,$

故所求通解为

$$y = C_1e^{-x} + (C_2\cos x + C_3\sin x) + x(C_4\cos x + C_5\sin x).$$

例6. 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解:特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0,$

特征根: $r_1=r_2=0,\quad r_{3,4}=1\pm 2i$

因此原方程通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

例7. 解方程 $y^{(5)}-y^{(4)}=0.$

解: 特征方程: $r^5-r^4=0,$ 特征根 :

$$r_1=r_2=r_3=r_4=0,\quad r_5=1$$

原方程通解:

$$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5e^x$$